高三数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。
4. 本卷命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合$A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{x|x+2\in A\}$，则$A\cap B=$

A. $\{1\}$　　B. $\{1,2\}$　　C. $\{1,2,3\}$　　D. $\{1,2,3,4\}$

2. 已知向量$\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,x)$，若$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$，则$|\boldsymbol{b}|=$

A. $2\sqrt{5}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. 20　　D. 5

3. 已知$z=\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}-\mathrm{i}^{2\,025}$，则$\bar{z}=$

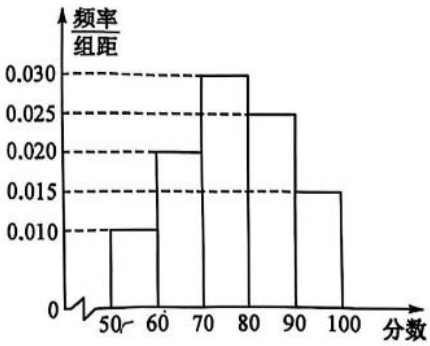
A. 1　　B. i　　C. $1-2\mathrm{i}$　　D. $1+2\mathrm{i}$

4. 已知$a\in\mathbf{R}$，若“$\exists x\in\mathbf{R}$，$a=2^x+1$”为假命题，则a的取值范围是

A. $(-\infty,1)$　　B. $(-\infty,1]$

C. $(1,+\infty)$　　D. $[1,+\infty)$

5. 如图是根据某校学生在一次数学考试中的成绩画出的频率分布直方图，则该次数学成绩的50%分位数约为(采用四舍五入法精确到1)



A. 76

B. 77

C. 78

D. 79

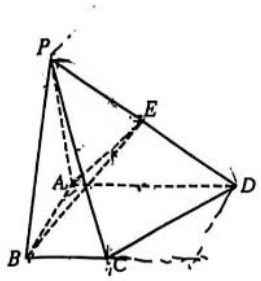
6. 在神经网络优化中，指数衰减的学习率模型为$L=L_0D^{\frac{n}{G_0}}$(D为常数)，其中L表示每一轮优化时使用的学习率，L_0表示初始学习率，D表示衰减系数，n表示训练迭代轮数，G_0表示衰减速度.已知某个指数衰减的学习率模型中$G_0=20$，当$n=10$时，学习率为0.25；当$n=30$时，学习率为0.062 5，则学习率衰减到0.05以下所需的训练迭代轮数至少为(已知$\lg 2\approx 0.3$)

A. 34　　B. 33　　C. 32　　D. 31

7. 已知 $A(0,1)$，$B(2,1)$，$F(1,0)$，动点 P 满足 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，若 $\overrightarrow{PM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PF}$，则直线 OM（O 为原点）斜率的最大值为

A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. 1　　D. 2

8. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为梯形，$AD/\!/BC$，且 $AD=2BC$，E 是棱 PD 的中点，设 $PC\cap$ 平面 $ABE=F$，则 $\frac{PF}{PC}$ 的值为



A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{5}{12}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 将函数 $f(x)=\sin x$ 的图象上每个点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$（纵坐标不变），再将图象上的所有的点向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，则

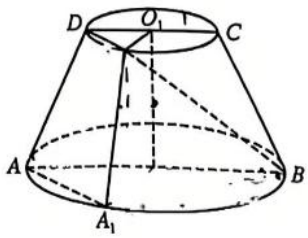
A. $g(x)$ 的最小正周期为 4π

B. $g(x)$ 的零点为 $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$

C. $g(x)$ 图象的对称轴方程为 $x=\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$

D. $g(x)$ 的单调递减区间为 $\left[4k\pi+\frac{3\pi}{4},4k\pi+\frac{11\pi}{4}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$

10. 如图，圆台 OO_1 的上、下底面半径分别为 1 和 2，侧面积为 9π，四边形 $ABCD$ 为其轴截面，四边形 OO_1DA 绕 OO_1 逆时针旋转 $60°$ 到四边形 $OO_1D_1A_1$，则



A. 圆台 OO_1 的高为 $2\sqrt{2}$

B. 圆台 OO_1 的体积为 $\frac{13\sqrt{2}\pi}{3}$

C. $BD_1=\sqrt{15}$

D 圆台 OO_1 的外接球的表面积为 $\frac{153\pi}{8}$

11. 已知 A，B 为两个事件，则下列命题正确的是

A. 若 $A\subseteq B$，$P(B)>0$，则 $P(A)\leqslant P(A|B)$

B. 若 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.8$，则 $P(AB)$ 的最小值可能为 0.38

C. 若 $P(A)>0$，$P(B)>0$，A，B 相互独立，则 $AB\neq\varnothing$

D. 若 $AB=\varnothing$，则 $P(A|\overline{B})=\frac{P(A)}{P(\overline{B})}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=10$，$a_{10}-a_6=-8$，若$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n$，则$\{a_n\}$前 10 项的和为_____.

13. 已知 F 为椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点，$O$ 为原点，A 为 C 上一点，$|OA|=|OF|$，若$|AF|=\frac{2a}{3}$，则 C 的离心率为_____.

14. 已知函数 $f(x)$满足：①$\forall x\in\mathbf{R}$，$f'(x)>0$；②$\forall x,y\in\mathbf{R}$，$f(x)f(y+x)=f(y)$. 若 k 是方程 $f(\ln 2x+x)f(2x^2-xe^{1-x})=f(1)$的实根，则 $e^{1-k}+2\ln 2k=$_____

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=e^x-ex+1$.

(1)求曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程；

(2)证明：$\forall x\geqslant 1$，$f(x)\geqslant x-\ln x$.

16.（本小题满分 15 分）

在$\triangle ABC$中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且 $1+\frac{\tan A}{\tan B}=\frac{2c}{b}$.

(1)求 A；

(2)若$\triangle ABC$的面积为 1，$a=2$，求 $\cos B\cos C$ 的值.

17.（本小题满分 15 分）

某电视台为迎接 2025 年新春佳节的到来，特举办一个有奖竞猜节目，问题有生活类、益智类两类. 每位参赛者回答 $n(n\geqslant 3)$次，每次回答一个问题，每位参赛者回答的第 1 个问题均从生活类题库中随机抽取，规定：对所有的问题若答对则下一题从益智类题库中随机抽取；若答错，则下一题从生活类题库中随机抽取. 已知答对一个生活类题目得 10 元，答错得 0 元；答对一个益智类题目得 20 元，答错得 0 元. 已知李明答对每个生活类题目的概率均为$\frac{2}{3}$，答对每个益智类题目的概率均为$\frac{1}{3}$，且每次回答正确与否相互独立.

(1)记李明前两题累计获奖为 X 元，求 X 的分布列及数学期望；

(2)记李明第 i 题回答正确的概率为 $P_i(i=1,2,\cdots,n)$，证明：$\left\{P_i-\frac{1}{2}\right\}$为等比数列，并求$\{P_i\}$的通项公式.

18.（本小题满分 17 分）

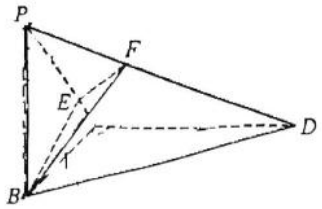
在三棱锥 $P-BCD$ 中，$CB\perp CD$，$CD=2CB=2$，PB 与平面 BCD 所成的角为 θ.

(1)若 $\theta=90°$，$\angle BPC=30°$，如图，过点 B 作平面 $BEF\perp PD$，分别交 PC，PD 于点 E，F.

（ⅰ）求证：$BE\perp$ 平面 PCD；

（ⅱ）设 $\overrightarrow{BG}=2\overrightarrow{GC}$，$H$ 为平面 BEF 内的动点，求 $\triangle CGH$ 周长的最小值.

(2)若 $\theta=60°$，$PB=1$，求二面角 $P-CD-B$ 的取值范围.



19.（本小题满分 17 分）

已知双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的两条渐近线分别为 $l_1:y=\sqrt{3}x$，$l_2:y=-\sqrt{3}x$，若点 A，B 分别在 l_1，l_2 上（A，B 不同于原点 O），且直线 AB 是 C 的切线，则称 $\triangle OAB$ 是 C 的“渐切三角形”. 已知 C 在点 (s,t) 处的切线方程为 $sx-\frac{ty}{b^2}=1$.

(1)写出 C 的一个“渐切三角形”的顶点 A，B 的坐标及切线 AB 的方程，并求出其面积；

(2)已知点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)(x_1x_2>0)$ 分别在 l_1，l_2 上，$\triangle OAB$ 的面积为 $\sqrt{3}$，试问 $\triangle OAB$ 是否是 C 的“渐切三角形”？并说明理由；

(3)若 $\triangle OAB$ 是 C 的“渐切三角形”，AB 与 C 相切的切点 M 的横坐标大于 0，F 为 C 的左焦点，证明：$\angle AFB$ 为定值.

高三数学参考答案、提示及评分细则

1. C　B 中的元素为 $-1,0,1,2,3$，所以 $A\cap B=\{1,2,3\}$. 故选 C.

2. A　由 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$，得 $x-2\times2=0$，所以 $x=4$，故 $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$. 故选 A.

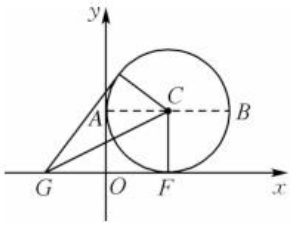
3. D　$z=\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}-\mathrm{i}^{2\,025}=\dfrac{2(1-\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}-\mathrm{i}=1-2\mathrm{i}$，$\bar{z}=1+2\mathrm{i}$. 故选 D.

4. B　“$\forall x\in\mathbf{R}, a\neq2^x+1$”为真命题，所以 $a\notin\{y\mid y=2^x+1, x\in\mathbf{R}\}$，而 $y=2^x+1$ 的值域为 $(1,+\infty)$，所以 $a\notin(1,+\infty)$，所以 a 的取值范围是 $(-\infty,1]$. 故选 B.

5. B　从左到右前 2 个小组的频率分别为 0.1，0.2，第 3 个小组的频率为 0.3，$0.1+0.2<0.5$，$0.1+0.2+0.3>0.5$，故 50%分位数在 $[70,80)$ 内，$70+\dfrac{0.5-0.3}{0.3}\times10\approx77$. 故选 B.

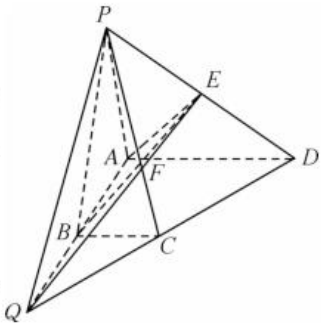
6. A　由题意得 $\begin{cases}L_0D^{\frac{10}{20}}=\dfrac{1}{4},\\ L_0D^{\frac{30}{20}}=\dfrac{1}{16},\end{cases}$ 解得 $L_0=\dfrac{1}{2}$，$D=\dfrac{1}{4}$，所以 $L=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{n}{20}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n}{10}+1}$. 由 $L=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n}{10}+1}<0.05$，得 $\dfrac{n}{10}+1>\log_{\frac{1}{2}}0.05=\dfrac{\lg0.05}{\lg\frac{1}{2}}=\dfrac{\lg0.01+\lg5}{-\lg2}=\dfrac{-2+1-\lg2}{-\lg2}=\dfrac{1}{\lg2}+1$，所以 $\dfrac{n}{10}>\dfrac{1}{\lg2}$，即 $n>\dfrac{10}{\lg2}\approx\dfrac{10}{0.3}=\dfrac{100}{3}$. 而 $\dfrac{100}{3}\in(33,34)$，所以训练迭代轮数至少为 34. 故选 A.

7. A　由题意得 $\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PB}$，所以点 P 的轨迹是以线段 AB 为直径的圆，圆心为 $C(1,1)$，半径 $r=1$. 设 $P(x_0,y_0)$，由 $2\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PF}$，知 M 为 PF 的中点，所以 $M\left(\dfrac{x_0+1}{2},\dfrac{y_0}{2}\right)$，所以 $k_{OM}=\dfrac{\frac{y_0}{2}}{\frac{x_0+1}{2}}=\dfrac{y_0}{x_0-(-1)}$. 设 $G(-1,0)$，显然 FG 是圆 C 的一条切线，另一条切线的斜率即为 k_{OM} 的最大值.



设直线 GC 的倾斜角为 α，则 $\tan\alpha=\dfrac{1-0}{1-(-1)}=\dfrac{1}{2}$. 由对称性，$(k_{OM})_{\max}=\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{2\times\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{4}{3}$. 故选 A.

8. B　延长 AB，DC，设 $AB\cap CD=Q$. 则平面 $ABE\cap$ 平面 $ABCD=AQ$，平面 $PCD\cap$ 平面 $ABCD=DQ$，$AQ\cap DQ=Q$，则 $Q\in$ 平面 ABE，$Q\in$ 平面 PCD. 又平面 $ABE\cap$ 平面 $PCD=EF$，由基本事实 3，得 $Q\in EF$，即 $F\in EQ$. 又 $F\in PC$，所以 $PC\cap EQ=F$. 由 $AD//BC$，且 $AD=2BC$，知 C 为线段 DQ 的中点. 又 E 为 PD 的中点，所以点 F 为 $\triangle PDQ$ 的重心，所以 $\dfrac{PF}{PC}=\dfrac{2}{3}$. 故选 B.



9. BC　由题意，$g(x)=\sin2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos2x$，所以 $g(x)$ 的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，故 A 错误；令 $2x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$，故 B 正确；令 $2x=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，则 $x=\dfrac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，故 C 正确；令 $2k\pi\leqslant2x\leqslant2k\pi+\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $k\pi\leqslant x\leqslant k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，故 D 错误. 故选 BC.

10. ACD　设圆台 OO_1 的高为 h，母线长为 l，由题意，得 $\pi(1+2)l=9\pi$，解得 $l=3$，高 $h=\sqrt{3^2-(2-1)^2}=2\sqrt{2}$，故 A 正确；$V_{\text{圆台}OO_1}=\dfrac{1}{3}\times2\sqrt{2}\times\pi\times(1^2+2^2+1\times2)=\dfrac{14\sqrt{2}\pi}{3}$，故 B 错误；对于 C，$\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1D_1}$，$\overrightarrow{BD_1}^2=\overrightarrow{BO}^2+\overrightarrow{OO_1}^2+\overrightarrow{O_1D_1}^2+2\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{OO_1}+2\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{O_1D_1}+2\overrightarrow{OO_1}\cdot\overrightarrow{O_1D_1}=2^2+(2\sqrt{2})^2+1^2+0+2\times\left(2\times1\times\cos\dfrac{\pi}{3}\right)+0=15$，所以 $BD_1=\sqrt{15}$，故 C 正确；对于 D，设圆台 OO_1 的外接球的球心为 E，半径为 R，$OE=x$，则 $R^2=x^2+2^2=(2\sqrt{2}-x)^2+1^2$，解得 $x=\dfrac{5}{4\sqrt{2}}$，$R^2=\left(\dfrac{5}{4\sqrt{2}}\right)^2+2^2=\dfrac{153}{32}$，故外接球的表面积为 $4\pi R^2=\dfrac{153\pi}{8}$，故 D 正确. 故选 ACD.

11. ACD　对于 A，若 $A\subseteq B$，$P(B)>0$，则 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A)}{P(B)}\geqslant\dfrac{P(A)}{1}=P(A)$，故 A 正确；对于 B，$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\geqslant0.6+0.8-1=0.4$，故 B 错误；对于 C，由 A，B 相互独立，得 $P(AB)=P(A)P(B)>0$，当然 $AB\neq$

$\varnothing$，故C正确；对于D，若$AB=\varnothing$，则$P(A)=P(A\cap(B\cup\overline{B}))=P((AB)\cup(A\overline{B}))=P(A\overline{B})$，所以$P(A|\overline{B})=\dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\dfrac{P(A)}{P(\overline{B})}$，故D正确. 故选ACD.

12. 10　由题意，$\{a_n\}$为等差数列，设公差为d，则$a_{10}-a_6=4d=-8$，所以$d=-2$. $\{a_n\}$前10项的和$S_{10}=10\times10+\dfrac{10\times9}{2}\times(-2)=10$.

13. $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　设F'为C的左焦点，因为$|OA|=|OF|=|OF'|$，所以$|OA|=\dfrac{1}{2}|FF'|$，所以$AF\perp AF'$. 由题设及椭圆的定义，得$|AF'|=\dfrac{4a}{3}$. 在Rt$\triangle AFF'$中，由勾股定理，得$\left(\dfrac{4a}{3}\right)^2+\left(\dfrac{2a}{3}\right)^2=(2c)^2$，即$\dfrac{5}{9}a^2=c^2$，所以离心率$e=\sqrt{\dfrac{c^2}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

14. 2　由②及题设条件，得$f(\ln 2x+2x^2+x-xe^{1-x})=f(1)$. 由①，知$f(x)$为增函数，得$\ln 2x+2x^2+x-xe^{1-x}=1$，即$\ln 2x^2+e^{\ln 2x^2}=1-x+\ln x+e^{\ln x+1-x}$. 令$g(x)=x+e^x$，则$g(\ln 2x^2)=g(1-x+\ln x)$. 又$g(x)$为增函数，所以$\ln 2x^2=1-x+\ln x$，即$\ln 2x=1-x$，所以$e^{1-x}=2x$，故$e^{1-k}+2\ln 2k=2k+2(1-k)=2$.

15. (1) 解：$f'(x)=e^x-e$，所以$f'(1)=0$. …… 2分

又$f(1)=1$，所以曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$y-1=0$. …… 4分

(2)证明：$\forall x\geqslant1$，$f(x)\geqslant x-\ln x\Leftrightarrow e^x-ex+1-x+\ln x\geqslant0$. …… 5分

令$F(x)=e^x-ex+1-x+\ln x$，

则$F'(x)=e^x-e-1+\dfrac{1}{x}$，令$g(x)=F'(x)$，则$g'(x)=e^x-\dfrac{1}{x^2}$. …… 7分

显然$g'(x)=e^x-\dfrac{1}{x^2}$在$[1,+\infty)$上单调递增. …… 8分

又$g'(1)=e-1>0$，所以当$x\geqslant1$时，$g'(x)\geqslant g'(1)>0$，

所以$F'(x)=e^x-e-1+\dfrac{1}{x}$在$[1,+\infty)$上单调递增，…… 10分

所以$F'(x)\geqslant F'(1)=0$，当且仅当$x=1$时取等号.

所以$F(x)=e^x-ex+1-x+\ln x$在$[1,+\infty)$上单调递增，…… 12分

所以$\forall x\geqslant1$，$F(x)\geqslant F(1)=0$，所以$f(x)\geqslant x-\ln x$. …… 13分

16. 解：(1)由题意及正弦定理，得$1+\dfrac{\sin A\cos B}{\sin B\cos A}=\dfrac{2\sin C}{\sin B}$，…… 2分

即$\dfrac{\sin B\cos A+\sin A\cos B}{\sin B\cos A}=\dfrac{2\sin C}{\sin B}$，

即$\dfrac{\sin(A+B)}{\sin B\cos A}=\dfrac{2\sin C}{\sin B}$. …… 4分

由$A+B+C=\pi$，得$\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$，

所以有$\dfrac{\sin C}{\sin B\cos A}=\dfrac{2\sin C}{\sin B}$. …… 6分

又$\sin B\sin C\neq0$，所以$\cos A=\dfrac{1}{2}$. 又$A\in(0,\pi)$，所以$A=\dfrac{\pi}{3}$. …… 7分

(2)由正弦定理，得$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{a}{\sin A}$，

所以$b=\dfrac{a\sin B}{\sin A}$，$c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}$. …… 9分

所以$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{a\sin B}{\sin A}\times\dfrac{a\sin C}{\sin A}\times\sin A$

$=\dfrac{1}{2}a^2\dfrac{\sin B\sin C}{\sin A}$. …… 11分

将$S_{\triangle ABC}=1$，$a=2$，$\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$代入上式，得

$\dfrac{1}{2}\times2^2\times\dfrac{\sin B\sin C}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=1$，所以$\sin B\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. …… 13分

所以$\cos B\cos C=\cos(B+C)+\sin B\sin C=-\cos A+\sin B\sin C=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}-2}{4}$. …… 15分

17. (1)解：由题意，知X所有可能的取值为0，10，30. …… 2分

记$A_i(i=1,2)$为“李明答对第i题”，

则$P(X=0)=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$；

$P(X=10)=P(A_1\overline{A_2})+P(\overline{A_1}A_2)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$；

$P(X=30)=P(A_1A_2)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$. …… 5分

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{9}+10\times\frac{2}{3}+30\times\frac{2}{9}=\frac{40}{3}$. …… 7分

(2)证明：李明第 $i(i\geqslant 2)$ 题回答正确有两种情形：①第 $i-1$ 个题回答正确，且第 i 个题回答正确；②第 $i-1$ 个题回答错误，且第 i 个题回答正确，由全概率公式，得

$P_i=P_{i-1}\times\frac{1}{3}+(1-P_{i-1})\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}P_{i-1}$. …… 10分

所以 $P_i-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}\left(P_{i-1}-\frac{1}{2}\right)$. …… 12分

又 $P_1-\frac{1}{2}=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\neq 0$，所以 $\left\{P_i-\frac{1}{2}\right\}$ 是以 $\frac{1}{6}$ 为首项，以 $-\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列， …… 13分

所以 $P_i-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{i-1}$，即 $P_i=\frac{1}{2}+(-1)^{i-1}\frac{1}{2\times 3^i}$.

所以 $\{P_i\}$ 的通项公式为 $P_i=\frac{1}{2}+(-1)^{i-1}\frac{1}{2\times 3^i}$. …… 15分

18. (1)(ⅰ)证明：由题意，$PB\perp$ 平面 BCD，所以 $PB\perp CD$. …… 1分

又 $CB\perp CD$，$PB\cap CB=B$，所以 $CD\perp$ 平面 PBC. …… 2分

又 $BE\subset$ 平面 PBC，所以 $CD\perp BE$. …… 3分

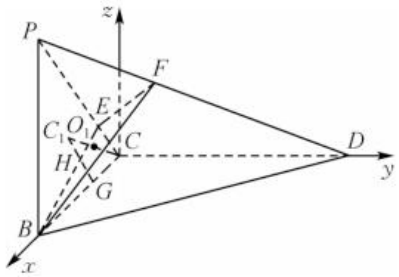
因为 $PD\perp$ 平面 BEF，所以 $PD\perp BE$.

又 $CD\perp BE$，$CD\cap PD=D$，所以 $BE\perp$ 平面 PCD. …… 4分

(ⅱ)解：因为 $PB\perp$ 平面 BCD，所以 $PB\perp BC$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PBC$ 中，$BC=1$，$PB=\frac{BC}{\tan 30^\circ}=\sqrt{3}$.

如图，以 C 为原点，分别以直线 CB，CD 为 x 轴，y 轴，建立空间直角坐标系 $Cxyz$，



则 $C(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$D(0,2,0)$，$P(1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{DP}=(1,-2,\sqrt{3})$. …… 5分

过 C 作平面 BEF 的垂线 CC_1，O_1 为垂足，这里点 C_1 与 C 关于 O_1 对称. 连接 C_1G，设直线 $C_1G\cap$ 平面 $BEF=H$，由对称性及两点之间线段最短，知该点 H 使得 $\triangle CGH$ 的周长最小. …… 6分

平面 BEF 的单位法向量 $\boldsymbol{n}=\frac{\overrightarrow{DP}}{|\overrightarrow{DP}|}=\frac{1}{2\sqrt{2}}(1,-2,\sqrt{3})$. …… 7分

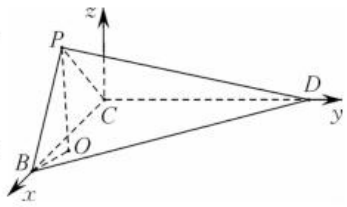
又 $\overrightarrow{CB}=(1,0,0)$，所以 $CO_1=|\overrightarrow{CB}\cdot\boldsymbol{n}|=\frac{1}{2\sqrt{2}}$，$CC_1=2CO_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$. …… 8分

所以 $\overrightarrow{CC_1}=|\overrightarrow{CC_1}|\boldsymbol{n}=\frac{1}{4}(1,-2,\sqrt{3})$，所以 $C_1\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. …… 9分

又 $G\left(\frac{1}{3},0,0\right)$，所以 $\triangle CGH$ 周长的最小值为 $C_1G+GC=\sqrt{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$.

…… 10分

(2)解：设点 P 在平面 BCD 内的射影为 O，因为 PB 与平面 BCD 所成的角为 60°，



所以 $\angle PBO=60^\circ$，$PO=PB\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$BO=PB\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$. …… 11分

因为 $CB\perp CD$，分别以直线 CB，CD 为 x 轴，y 轴，建立空间直角坐标系 $Cxyz$.

设 $O(x_0,y_0,0)$，因为 $BO=\frac{1}{2}$，所以点 O 的轨迹是以 $B(1,0,0)$ 为圆心，半径为 $\frac{1}{2}$ 的在平面 BCD 内的圆，且 $(x_0-1)^2+y_0^2=\frac{1}{4}$.

则 $C(0,0,0)$，$P\left(x_0,y_0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{CP}=\left(x_0,y_0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{CD}=(0,2,0)$. …… 13分

设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CP}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2y=0,\\ x_0x+y_0y+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0.\end{cases}$

令 $x=\sqrt{3}$，则 $y=0$，$z=-2x_0$，所以 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},0,-2x_0)$. …… 14分

又 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$ 为平面 BCD 的一个法向量，

所以 $\cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{-2x_0}{\sqrt{3+4x_0^2}}$. …… 15 分

因为 $-\dfrac{1}{2}\leqslant x_0-1\leqslant\dfrac{1}{2}$，所以 $\dfrac{1}{2}\leqslant x_0\leqslant\dfrac{3}{2}$，$1\leqslant 4x_0^2\leqslant 9$，所以 $\dfrac{4}{3}\leqslant\dfrac{3}{4x_0^2}+1\leqslant 4$，

所以 $|\cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\sqrt{\dfrac{4x_0^2}{3+4x_0^2}}=\sqrt{\dfrac{1}{\dfrac{3}{4x_0^2}+1}}$ 的取值范围是 $\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

又二面角 $P-CD-B$ 为锐二面角，$y=\cos x$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，

所以二面角 $P-CD-B$ 的取值范围是 $\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$. …… 17 分

19. (1)解：由题意，得 $b=\sqrt{3}$，所以 C 的方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$. …… 1 分

$A(1,\sqrt{3})$，$B(1,-\sqrt{3})$，直线 AB：$x=1$ 是 C 的切线，$\triangle OAB$ 是 C 的渐切三角形. …… 2 分

$S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 1=\sqrt{3}$. …… 3 分

(2)解：设 $A(x_1,\sqrt{3}x_1)$，$B(x_2,-\sqrt{3}x_2)$，这里 $x_1x_2>0$.

则 $\overrightarrow{OA}=(x_1,\sqrt{3}x_1)$，$\overrightarrow{OB}=(x_2,-\sqrt{3}x_2)$，所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-2x_1x_2$.

$$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\times|OA|\times|OB|\sin\angle AOB=\frac{1}{2}\sqrt{|OA|^2\times|OB|^2(1-\cos^2\angle AOB)}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{|OA|^2\times|OB|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4x_1^2\times 4x_2^2-(-2x_1x_2)^2}=\sqrt{3}|x_1x_2|.$$

由题意，$S_{\triangle OAB}=\sqrt{3}|x_1x_2|=\sqrt{3}$，所以 $|x_1x_2|=1$，又 $x_1x_2>0$，所以 $x_1x_2=1$. …… 5 分

若直线 AB 的斜率不存在，则 $x_1=x_2=1$，或 $x_1=x_2=-1$，直线 $x=1$ 与 C 切于点 $(1,0)$，

或直线 $x=-1$ 与 C 切于点 $(-1,0)$，$\triangle OAB$ 的面积为 $\sqrt{3}$，满足题意；…… 6 分

若 AB 的斜率存在，则 $k_{AB}=\dfrac{\sqrt{3}x_1+\sqrt{3}x_2}{x_1-x_2}$，$AB$：$y-\sqrt{3}x_1=\dfrac{\sqrt{3}(x_1+x_2)}{x_1-x_2}(x-x_1)$，

即 $y=\dfrac{\sqrt{3}(x_1+x_2)x-2\sqrt{3}}{x_1-x_2}$，即 $(x_1-x_2)y=\sqrt{3}[(x_1+x_2)x-2]$. …… 7 分

由 $\begin{cases}(x_1-x_2)y=\sqrt{3}[(x_1+x_2)x-2],\\ 3x^2-y^2=3\end{cases}$ 消去 y 并整理得 $x^2-(x_1+x_2)x+1+\dfrac{(x_1-x_2)^2}{4}=0$.

该方程的判别式 $\Delta=(x_1+x_2)^2-4\left[1+\dfrac{(x_1-x_2)^2}{4}\right]=4x_1x_2-4=0$，

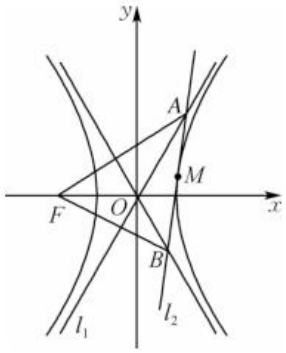
所以直线 AB 与 C 有且仅有一个公共点，所以直线 AB 是 C 的切线.

所以 $\triangle OAB$ 是 C 的“渐切三角形”. …… 9 分

(3)证明：设 $M(x_0,y_0)(x_0>0)$，由题意，直线 AB：$x_0x-\dfrac{y_0y}{3}=1$，即 $3x_0x-y_0y=3$.

由 $\begin{cases}3x_0x-y_0y=3,\\ y=\sqrt{3}x,\end{cases}$ 解得 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}x_0-y_0}$，$y=\dfrac{3}{\sqrt{3}x_0-y_0}$.

故 $A\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}x_0-y_0},\dfrac{3}{\sqrt{3}x_0-y_0}\right)$，同理可得 $B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}x_0+y_0},-\dfrac{3}{\sqrt{3}x_0+y_0}\right)$. …… 11 分



又 $F(-2,0)$，故 $\overrightarrow{FA}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}x_0-y_0}+2,\dfrac{3}{\sqrt{3}x_0-y_0}\right)$，$\overrightarrow{FB}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}x_0+y_0}+2,-\dfrac{3}{\sqrt{3}x_0+y_0}\right)$，

所以 $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{3}x_0-2y_0}{\sqrt{3}x_0-y_0}\times\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{3}x_0+2y_0}{\sqrt{3}x_0+y_0}-\dfrac{3}{\sqrt{3}x_0-y_0}\times\dfrac{3}{\sqrt{3}x_0+y_0}$.

又 $(\sqrt{3}x_0-y_0)(\sqrt{3}x_0+y_0)=3x_0^2-y_0^2=3$，可得 $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=2+4x_0$，① …… 13 分

直线 AB：$3x_0x-y_0y=3$ 与 x 轴的交点为 $N\left(\dfrac{1}{x_0},0\right)$，所以 $|FN|=\dfrac{1}{x_0}+2$，

$S_{\triangle FAB}=\dfrac{1}{2}\times|FN|\times|y_A-y_B|=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x_0}+2\right)\left|\dfrac{3}{\sqrt{3}x_0-y_0}+\dfrac{3}{\sqrt{3}x_0+y_0}\right|=\sqrt{3}(1+2x_0)$，② …… 15 分

又 $S_{\triangle FAB}=\dfrac{1}{2}|FA|\cdot|FB|\sin\angle AFB$，$\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=|FA|\cdot|FB|\cos\angle AFB$，

由②÷①，得 $\dfrac{1}{2}\tan\angle AFB=\dfrac{\sqrt{3}(1+2x_0)}{2+4x_0}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\tan\angle AFB=\sqrt{3}$.

又 $\angle AFB\in(0,\pi)$，所以 $\angle AFB=\dfrac{\pi}{3}$，为定值. …… 17 分